DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

On note (x, t) les coordonnées dans $\mathbb{R}^2$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$; pour toute fonction f de classe C^2 dans U, à valeurs complexes, on pose :

$$L(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t}.$$

On note H (U) l'ensemble des fonctions f de classe C^2 dans U, telles que $L(f) = 0$. Pour tout nombre réel $T > 0$, on note R_T ou $\overline{R_T}$ le rectangle (ouvert ou fermé).

$$R_T = \{ (x, t) / 0 < x < \pi, \ 0 < t < T \}$$
$$\overline{R_T} = \{ (x, t) / 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant t \leqslant T \}$$

On note C_T la réunion des trois côtés fermés de R_T :

$$C_T = \{ (x, t) / x = 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$\text{ou} \quad x = \pi, \ 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$\text{ou} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ t = 0 \}.$$

On note Λ_T le quatrième côté, ouvert à ses extrémités :

$$\Lambda_T = \{ (x, t) / 0 < x < \pi, \ t = T \}.$$

I

1° Soient α, β deux nombres réels. A quelle condition la fonction $e^{-\beta t} \sin \alpha x$ appartient-elle à $H(\mathbb{R}^2)$? Expliciter les valeurs de cette fonction sur C_T lorsque α est entier.

2° Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_1^\infty |a_n|$ soit convergente. Montrer que la fonction $\varphi(x) = \sum_1^\infty a_n \sin nx$ est continue.

3° Montrer qu'il existe une fonction Φ continue sur $\overline{R_T}$, telle que

a. Φ est de classe C^2 dans R_T, et $L(\Phi) = 0$ dans R_T

b. $\Phi(0, t) = \Phi(\pi, t) = 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$

c. $\Phi(x, 0) = \varphi(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

4° Montrer que la fonction Φ trouvée au I.3° se prolonge en une fonction $\check{\Phi}$ définie et continue dans le demi-plan fermé $t \geqslant 0$, indéfiniment dérivable dans le demi-plan ouvert $t > 0$, et telle que $L(\check{\Phi}) = 0$.

II

Dans cette partie, $\mathcal{E}_T$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{R_T}$, à valeurs réelles, de classe C^2 dans R_T, et dont les dérivées d'ordre $\leqslant 2$ se prolongent continûment à $R_T \cup \Lambda_T$.

1° Soit $f \in \mathcal{E}_T$, telle que $L(f) > 0$ sur $R_T \cup \Lambda_T$. Montrer que f atteint son maximum sur C_T.

2° Soit $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une fonction v de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2$, telle que $v \geqslant 0$, $v(x_0, t_0) = 0$, $L(v) \geqslant 2$.

3° Soit $f \in \mathcal{E}_T$ telle que $L(f) \geqslant 0$ sur $R_T \cup \Lambda_T$. Montrer que f atteint son maximum sur C_T (on pourra utiliser des fonctions de la forme $f + \varepsilon v$, avec $\varepsilon > 0$ et v convenablement choisis).

4° Soit g une fonction continue dans $\overline{R_T}$, à valeurs réelles. On suppose que g est nulle sur C_T, et que sa restriction à R_T appartient à $H(R_T)$. Montrer qu'on a $g = 0$ (on pourra commencer par examiner la restriction de g aux rectangles $R_{T'}$, pour $T' < T$).

5° Montrer que la fonction à valeurs complexes Φ de I.3° est la seule fonction continue sur $\overline{R_T}$ qui jouisse des propriétés *a. b. c.* de I.3°.

III

Pour tout nombre complexe z on pose

$$e_z(x, t) = e(x, t, z) = \exp(zx + z^2 t).$$

1° Montrer que la fonction $e(x, t, z)$ admet un développement en série entière, convergent pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$(1) \qquad e(x, t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, t) \frac{z^n}{n!}$$

où les coefficients V_n sont des polynômes de x, t, qu'on calculera.

Montrer qu'on a pour tout n, et pour tout $r > 0$:

.../...

E.N.S. ULM & SEVRES Groupe A (M') 1977

x5x

(2) $$V_n(x,t) = \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(x,t,re^{i\theta})\, r^{-n}\, e^{-ni\theta}\, d\theta.$$

Dans toute la suite du problème, V_n désigne le polynôme défini par la relation (1).

2° Montrer qu'on a $L(V_n) = 0$. Exprimer $\frac{\partial V_n}{\partial x}$, $\frac{\partial V_n}{\partial t}$ en fonction de V_{n-1}, V_{n-2}.

3° Soient x, t deux nombres réels, tels que $t > 0$.

Si r est un nombre réel > 0, on pose $f_r(\theta) = x\, r \cos\theta - t\, r^2 \cos 2\theta$. Calculer le maximum de $f_r(\theta)$ pour $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Calculer le minimum, pour $0 < r < \infty$, de la fonction

$$g(r) = r^{-n} \exp t\, r^2.$$

4° Montrer qu'on a, pour tout entier $n > 0$ et pour tout $t > 0$:

$$|V_n(x,-t)| \leqslant n! \left(\frac{2et}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\frac{x^2}{8t}.$$

5° Montrer qu'on a, pour $t > 0$:

$$V_{2n}(x,t) \geqslant \frac{(2n)!}{n!}\, t^n, \quad |V_{2n+1}(x,t)| \geqslant |x|\, \frac{(2n+1)!}{n!}\, t^n.$$

IV

Dans cette partie on pourra admettre sans démonstration les résultats suivants :

a. $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ pour $n \to \infty$ (formule de Stirling)

b. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2}\, dr = \sqrt{\pi}$.

1° Soit (x_0, t_0) un point de $\mathbb{R}^2$ tel que $x_0 \neq 0$, $t_0 > 0$, et soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\Sigma\, a_n\, V_n(x_0, t_0)$ soit convergente.

Montrer que la suite $\left(\frac{2nt_0}{e}\right)^{\frac{n}{2}} a_n$ est bornée.

2° Soit U_- la bande ouverte $U_- = \{(x,t) / -t_0 < t < 0\}$.

Montrer qu'avec les hypothèses de IV.1° la série

(S) $$\Sigma\, a_n\, V_n(x,t)$$

converge absolument dans U_-, et que sa somme appartient à $H(U_-)$.

On se propose de montrer que la série (S) converge en fait dans toute la bande ouverte $U = \{(x,t) / |t| < t_0\}$.

3° On pose pour $t > 0$ $k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\frac{-x^2}{4t}$. Montrer qu'on a pour z réel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y,t)\, e^{yz}\, dy = C \exp(zx + z^2 t)$$

où C est une constante qu'on calculera.

4° Montrer qu'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y,t)\, y^n\, dy = C\, V_n(x,t).$$

5° Calculer l'intégrale

$$F_A(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y,t)\, e^{Ay^2}\, dy.$$

Montrer que cette intégrale converge absolument pour $0 < t < T_A$, où T_A est un nombre qu'on exprimera en fonction de A.

6° Calculer le nombre $\sup_{y\in\mathbb{R}} |y^n e^{-Ay^2}|$. Montrer qu'on a, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\delta > 0$:

$$|V_n(x,t)| \leqslant V_n(|x|,|t|) \leqslant \left(\frac{2n}{e}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{(|t|+\delta)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\delta}} \exp\left(\frac{x^2}{4\delta}\right)$$

Montrer que, sous l'hypothèse de IV.1°, la série (S) converge dans la bande U, ($|t| < t_0$), et que sa somme appartient à H(U).

7° Montrer qu'on peut introduire une notion de bande de convergence pour les séries du type (S).

Exprimer à l'aide de la suite des coefficients $(a_n)_{n>0}$ la largeur de cette bande.

FIN

X96X

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail